VARIANT

ДВИ МГУ · Математика · 2025 · Поток 6

1. Какое из следующих двух чисел больше: $\sqrt{\dfrac{20}{7}}+\dfrac{13}{3}$ или 6?

2. Положительные действительные числа a и b удовлетворяют равенствам

$$a^3=a+1 \quad \text{и} \quad b^6=b+3a$$

Определите, какое из чисел a и b больше другого.

3. Решите неравенство $\log_{\frac{3}{2}} x^{\frac{3}{2}}+\log_{\frac{2}{3}} x^{\frac{2}{3}} \leqslant \dfrac{5}{6}\cdot x\cdot \log_6 x$.

4. Решите уравнение $\sin 2x-\cos 2x=\operatorname{tg} x$.

5. На сторонах AB и AC остроугольного треугольника ABC как на диаметрах построены окружности Ω_1 и Ω_2 соответственно. Через точку D пересечения этих окружностей (отличную от A) проведена прямая, пересекающая Ω_1 и Ω_2 в точках E и F соответственно, причём E и F лежат по одну сторону от AD (и отличны от D). Расстояние от A до середины M стороны BC равно 3, расстояние от A до середины N отрезка EF равно 2. Найдите MN.

6. Положительные действительные числа a, b, c удовлетворяют равенству $a+b+c=3$. Найдите наибольшее возможное значение выражения

$$\frac{(1+a)^2}{a+\frac{1}{b}}+\frac{(1+b)^2}{b+\frac{1}{c}}+\frac{(1+c)^2}{c+\frac{1}{a}}$$

7. Дан правильный тетраэдр $ABCD$ с ребром $2\sqrt{3}$. Найдите площадь сечения этого тетраэдра плоскостью, касающейся сферы, вписанной в тетраэдр, и параллельной рёбрам AB и CD.