VARIANT

ДВИ МГУ · Математика · 2025 · Поток 2

1. Известно, что $f(x) = \sqrt{x} + \dfrac{15}{x}$. Найдите наименьшее целое число, превосходящее $f\left(\dfrac{25}{16}\right)$.

2. Дана последовательность a_1, a_2, a_3, ... действительных чисел, удовлетворяющих при каждом натуральном n равенству

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = 2a_n - 1.$$

Последовательность $b_1,\ b_2,\ b_3, ...$ определяется соотношениями $b_1 = 2$ и $b_{n+1} = b_n + a_n$, $n \in \mathbb{N}$. Найдите $b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_{2025} - 2^{2025}$.

3. Решите неравенство

$$\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{2}{9^x - 1}\right) \leqslant \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{3^x + 31}\right).$$

4. Решите уравнение

$$\sqrt{3}\left(\sin^2 x \operatorname{tg} x + \cos^2 x \operatorname{ctg} x\right) = 4 - \sqrt{3}\sin 2x.$$

5. Окружности Ω_1 в Ω_2 находятся внутри окружности Ω, касаются окружности Ω в точках A и B соответственно и касаются друг друга внешним образом в точке C. Пусть O – центр окружности Ω и пусть D – точка пересечения прямой OC с отрезком AB. Найдите отношение $AD : DB$, если известно, что радиус окружности Ω в три раза больше радиуса окружности Ω_1 и в пять раз больше радиуса окружности Ω_2.

6. Последовательность действительных чисел a_1, a_2, a_3,..., a_{2025} удовлетворяет неравенствам

$$2\sqrt{a_n - (n-1)} \geqslant a_{n+1} - (n-1)$$

при каждом $n = 1,\ 2,\ 3, ..., 2024$ и неравенству

$$2\sqrt{a_{2025} - 2024} \geqslant a_1 + 1.$$

Найдите все возможные значения a_{2025}.

VARIANT

7. Все три плоских угла при вершине D тетраэдра $ABCD$ равны α. Найдите α, если известно, что $AB = BC = AC$, $AD = 1$ и $BD = \sqrt{3} - 1$.